Mathematik anthropologisch: Materialisierung und Systemhaftigkeit

Roland FISCHER, IFF Wien

Es gibt einen eigenartigen Zwiespalt, eine Widersprüchlichkeit mit der Mathematik: Auf der einen Seite wird sie als etwas Abstraktes, Lebensfernes, zum Teil Unverständliches gesehen, auf der anderen Seite verläßt man sich auf sie wie auf keine andere Disziplin; sowohl im täglichen Leben – man bezahlt eine Rechnung, die einem vorgelegt wird – als auch wenn es um Anwendungen komplizierterer Mathematik in Technik und Wirtschaft geht. Dieses Sich-Verlassen gilt auch für jene, die kein Naheverhältnis zur Mathematik haben. Bei ihnen ist sogar oft mehr blindes Vertrauen in die Mathematik feststellbar als bei jenen, die die Mathematik kennen.

In diesem Artikel werden zwei Antworten auf die Frage nach der Bedeutung der Mathematik für den Menschen gegeben und damit Beiträge zur Aufklärung der genannten Widersprüchlichkeit geleistet. Die beiden Antworten in Kurzfassung: Erstens, Mathematik läßt Abstraktes konkret werden, und zweitens, Mathematik stellt einen Gesamtzusammenhang her. Beides hat Bedeutung im Zusammenleben der Menschen, vor allem dann, wenn es viele sind.

Zur Bedeutung des Abstrakten

Was als "abstrakt" oder. "konkret" bezeichnet wird, ist unterschiedlich. Das folgende ist ein (naiver) Versuch, einen zumindest graduellen Unterschied anzudeuten. Es gibt Dinge, die wir unmittelbar wahrnehmen können: ein Blatt, einen anderen Menschen (seinen Körper), ein Geräusch, einen Duft, etc. Sie sind konkret. Anderes erschließen wir indirekter: Krankheit, wirtschaftliche Prosperität, Zeitgeist, Schönheit usw. Sie sind abstrakter. Wir bezeichnen sie gelegentlich als Interpretationen oder Konstruktionen, im Gegensatz zu den konkreteren Dingen, Fakten und Daten und stellen vielleicht sogar die Frage: Gibt es diese Abstrakta überhaupt? Wenn ja, in welchem Sinn? Solche Fragen werden allerdings von konstruktivistisch denkenden Philosophen auch bezüglich der genannten konkreteren Dinge gestellt: Ein Geräusch ist doch auch bloß eine Interpretation gewisser akustischer Reize, ein Blatt eine organismusinterne Konstruktion.[1] Doch selbst wenn wir von der Konstruiertheit aller Wahrnehmungen ausgehen, ist zu beobachten, daß wir bezüglich mancher Konstruktionen ein Gefühl höherer Gewißheit hinsichtlich ihrer Existenz, ihrer Beschaffenheit usw. entwickelt haben und eine höhere intersubjektive Übereinstimmung als bezüglich anderer. Erstere nennen wir konkreter als letzere. Das, worüber wir die höchste Gewißheit haben, sowohl individuell als auch kollektiv, nennen wir Materie.

Woher diese Unterschiede im Gewißheitsgrad herrühren, mag verschieden beantwortet werden: Sie können durch den Wahrnehmungsapparat (Sinnesorgane), durch individualpsychische Einübung oder durch sozial-kulturelle Prozesse bedingt sein; wahrscheinlich in der Regel durch eine Mischung von all dem. Was bleibt, ist: Es gibt Unterschiede. Die These ist nun, daß gerade diese Unterschiede den Wirkungsbereich der Mathematik bilden; genauer, daß Mathematik eine Methode ist, das Abstrakte konkret werden zu lassen.

Bevor nun auf die Möglichkeiten der Mathematik näher eingegangen wird, kurz zur Frage, welche Möglichkeiten des Umgangs mit Abstrakta es überhaupt gibt. Ein wichtiger Schritt im Umgang mit dem Abstrakten ist die Einführung einer wortsprachlichen Bezeichnung. Damit erfolgt eine Vergegenständlichung. Man sagt, daß sich die Sprachen unterschiedlich eignen für Substantivierungen, insbesondere dafür, daß für Prozesse, Beziehungen oder Erscheinungen Substantive eingeführt werden. Was immer dieses Abstraktum ist und wie

[1] Vgl. Schmidt, Siegfried J (Hg.): Der Diskurs des Radikalen Konstruktivismus, Frankfurt a. M. 1987.

immer die Bezeichnung dafür lautet, durch deren Einführung gewinnt es an Realität, zumindest auf einer emotionalen Ebene.

Eine weitere Möglichkeit für die Vergegenständlichung von Abstrakta ist die Verbildlichung: vom einfachen Pfeil über eine schematische Darstellung etwa von Abläufen bis zur Fahne oder zum Kreuz. Visualisierung spielt auch in der Präsentationsdidaktik eine zunehmende Rolle.

Eine dritte Möglichkeit, zum Teil in Verbindung mit der Verbildlichung, ist die Personifizierung. Das Abstrakte wird konkret, indem ich es etwa mit einem Gott in Verbindung bringe, z. B. mit dem Gott des Krieges. Die Verbindung abstrakt - mystisch liegt auf der Hand. Man denke an Zahlenmystik oder die religiösen Ursprünge des Abstraktums "Geld".

Die Abstrakta der Mathematik

Nicht alle abstrakten Dinge "erfreuen" sich einer mathematischen Behandlung. Welche Abstrakta sind nun für eine solche Behandlung zugänglich?

Traditionell sieht man die Mathematik als eine Wissenschaft von Zahl und Raum und verweist somit auf die alte Einteilung in Arithmetik und Geometrie. "Zahl" ist ein Abstraktum, jedenfalls im Verhältnis zu den Gegenständen, auf die sie sich jeweils bezieht. Man kann fünf Äpfel oder fünf Birnen sehen – die Fünfheit einer Menge hat noch niemand gesehen. Das setzt sich fort bis zu allen Meßgrößen, egal ob sie reine Ordnungsgrößen sind oder ob Rechnen einen Sinn macht. Die Abstrakta der Geometrie sind die Punkte, Geraden, Kreise, Figuren, Flächen, Körper – bestimmte Idealisierungen also – aber auch Muster wie Konfigurationen, Kristallgitter, etc. Auf einer nächsten Ebene der Abstraktion kann man Verhältnisse zwischen Zahlen (z. B. 5:3 als Frequenzverhältnis bei einer großen Sexte) oder Beziehungen zwischen Figuren (Ähnlichkeit, Kongruenz) betrachten. Soweit waren schon die alten Griechen.

Der große Durchbruch der neuzeitlichen Mathematik war die Erfassung einer neuen Abstraktion, die auch eine dynamische Komponente in die Mathematik brachte. Mit Hilfe des Funktionsbegriffes und von Variablen können Bewegungen der Gestirne oder von Geschoßen – und eben nicht nur statische Konfigurationen – betrachtet werden, oder Zusammenhänge zwischen variablen Größen – und nicht nur einige Zahlen und ihre Verhältnisse. Die Differentialrechnung als Methode zur Untersuchung und zur Konstruktion von Funktionen wurde entwickelt, wobei die Änderungen der Funktionswerte die zentrale Rolle spielen. In der Geometrie wurde die Theorie der Abbildungen entwickelt, die von den einzelnen Figuren abstrahiert, indem sie die Beziehungen zwischen diesen thematisiert und invariante Eigenschaften betrachtet.

Ein anderer Strang der Erweiterung der Möglichkeiten der Mathematik ist der folgende: Nicht nur einzelne Größen, wie Länge einer Bahn, sondern sämtliche Koordinaten, eventuell zusätzlich Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impuls und anderes werden simultan betrachtet. Oder: Nicht nur die Kosten eines Produktes werden über die Zeit verfolgt, sondern gleichzeitig werden die Kosten mehrerer Produkte betrachtet. Also: Statt einer Zahlenreihe wird eine ganze Tabelle Gegenstand der Untersuchung. Die Mathematiker sprechen von mehreren Dimensionen, mehrfach verflochtene Zusammenhänge können studiert werden. Ein großer Teil dieser Betrachtungen erfolgt im Rahmen der "Linearen Algebra".

Ein weiteres Abstraktum: Risiko oder Chance. Diese erfaßt der mathematische Wahrscheinlichkeitsbegriff. Es können Fragen behandelt werden wie z. B.: Mit welchem Grad an Gewißheit können wir von einer Stichprobe auf das Ganze schließen? Wie kann die Zuverlässigkeit von Technologien beurteilt werden? Usw.

All diese Abstrakta – und viele andere – waren schon vor 100 Jahren Gegenstände der Mathematik. Im 20. Jahrhundert hat sich der Bereich dessen, was als mathematisch angesehen und von der Mathematik behandelt wird, wiederum enorm erweitert. Ich greife nur drei Beispiele heraus.:

- Behandlung von Beziehungsgeflechten, insbesondere Rückkopplungen, in vernetzten Systemen im Rahmen der sogenannten Systemdynamik, die beispielsweise Simulationsmodelle für die Zukunftsszenarien erstellt;
- Beschreibung von Netzwerken in Organisationen, Gruppen usw. durch entsprechende Diagramme, sogenannte Graphen;
- flexible Formen zur Darstellung statistischer Daten im Rahmen der Exploratory Data Analysis.

Besonders deutlich zum Ausdruck kommt der Aspekt der Abstraktion in der modernen mathematischen Systemtheorie. Auf ihrer Basis kann ein Großteil der gesamten Mathematik rekonstruiert werden. Ein System im mathematischen Sinn besteht erstens aus irgendwelchen "Dingen", zweitens aus Beziehungen zwischen diesen, drittens gegebenenfalls aus Beziehungen zwischen den Beziehungen usw.[2] Die motivationale These lautet: Das Abstrakte, die jeweilige Beziehungsebene, ist bedeutungsvoll. Einerseits ist sie wirksam und zweitens ermöglicht sie Vergleich, Analogie oder Übertragung, Lernen von einem für das andere. Ob die Seerosen in einem Teich oder das Kapital auf dem Sparbuch oder die gesamte Menschheit wachsen: auf abstrakter Ebene sind dies analoge Mechanismen, die z. B. zu exponentiellem Wachstum führen. Ob die Verteilung der Intelligenzquotienten oder jene der Schraubenlängen betrachtet wird, ich erhalte unter bestimmten Voraussetzungen immer eine Gauß'sche Glockenkurve. Oder: Bestimmte Rückkopplungsprozesse führen zu Schwankungen, sei es im Preis für Schweinefleisch oder in der Beschäftigungssituation für Lehrer. Oder: Bestimmte Konstellationen führen dazu, daß sich ein Gleichgewicht herstellt, egal ob die Situation eines wirtschaftlichen Marktes oder der Organismen in einem Biotop betrachtet wird.

Die Kehrseite der Abstraktionsthese lautet: Auf das / den / die einzelne/n kommt es nicht an, es/er/sie ist austauschbar. Der abstrakte Mechanismus, in dem sie stehen – er kann auf verschiedenen Ebenen sein, etwa auch ein Meta-Mechanismus von Mechanismen – ist das eigentlich Bedeutungsvolle. Hinter dem Ganzen steht ein Weltbild. Früher formulierten es die Mathematiker so: "Alles ist Zahl". Der musikalische Ton kann aus den Verhältnissen der Saitenlängen von Instrumenten erklärt werden, die Harmonie des Weltalls aus den Verhältnissen der Größen der Planetenbahnen. Die moderne, systemtheoretische Variante lautet: "Alles ist Struktur bzw. Prozeß". Das reicht bis zur Erklärung des Lebens als bestimmte Organisationsstruktur ("auto-poietische Maschine" nach Maturana und Varela[3]) oder sogar bis zur Auffassung, daß das Substanzielle schlechthin, die Materie, nichts anderes als eine Asymmetrie des Raumes sei. Und dieser selbst sei leer.

Die Materialisierungsthese

Was ist nun die spezifische Leistung der Mathematik im Hinblick auf die genannten – und andere – Abstrakta? Begriffe bilden, Bilder entwerfen, kann man auch ohne Mathematik. Die zentrale These lautet: Mathematik bietet für bestimmte, häufig auftretende Abstrakta symbolische materielle Darstellungsformen an, die das Abstrakte sichtbar, handhabbar und konkret werden lassen. Sie stellt damit eine Beziehung zwischen abstrakt(er)em und konkret(er)em her. "Materiell" ist dabei wörtlich gemeint: Steine, Finger, Zeichen auf Papier,

---

[2] Siehe dazu: Rappoport, Anatol: Allgemeine Systemtheorie. Wesentliche Begriffe und Anwendungen, Darmstadt 1988.

[3] Siehe: Schmidt: Diskurs.

Rechenmaschinen usw. werden benützt. Es ist zwar Vieles im Kopf möglich – Kopfrechnen, Ideenfindung – die eigentliche, insbesondere gesellschaftliche Wirksamkeit der Mathematik hängt mit der auslagernden Materialisierung zusammen.[4] In diesem Sinn ist der Computer kein Zufall in der Mathematik, er ist bislang letzter Schritt in einer Serie von Materialisierungen.

Welche hat es sonst gegeben bzw. gibt es noch? Langwierige Zählvorgänge wurden durch Rechensteine unterstützt: ein Stein pro vorbeigehendem Schaf auf einem Haufen; sobald es (z.B.) zehn sind, wird ein neuer Haufen gebildet; oder man legt einen Stein auf einen neuen Haufen, der die Menge der Zehnergruppen symbolisiert usw. Man benützt heute noch Strichsymbolik zur Unterstützung des Zählens:

~~IIII~~ ~~IIII~~ III

steht für 13. Am Beginn des Rechenunterrichts wird mit Fingern oder bestimmten Rechenstäben gearbeitet.

Die verschiedenen Zahlzeichensysteme, ägyptische, babylonische, arabische, stellen eine nächste Stufe der Materialisierung dar. Hier tritt der symbolische Charakter in den Vordergrund: Den Zahlzeichen sieht man weniger an, wofür sie stehen (aber auch die Strichsymbolik bedarf einer Erläuterung). Das heute gebräuchliche Stellenwertsystem, auch für nicht ganze Zahlen, hat sich relativ spät entwickelt (im 16. Jahrhundert). Man kann unterschiedliche Leistungsmöglichkeiten der Zahlsysteme feststellen. Man versuche zwei Zahlen in römischer Schreibweise zu multiplizieren! Auf der anderen Seite sieht man in der römischen "kumulativen" Schreibweise ganz gut die Größe der Zahlen. Oder: Ob man 3/4 oder 0,75 schreibt, macht einen Unterschied. (In der dezimalen Schreibweise kann man Zahlen leichter der Größe nach ordnen.) Das Erfinden neuer Darstellungsformen hat die Leistungsfähigkeit der Mathematik immer wieder stark beeinflußt. Insbesondere das schriftliche Rechnen – durch elektronische Maschinen heute in den Hintergrund getreten – erfordert eine passende Notation, der Umgang mit dem Computer wieder eine andere (z.B. Windows).

Entscheidender Fortschritt war im 15. Jahrhundert die "Erfindung" der algebraischen Notation: Buchstaben für beliebige Zahlen. Damit konnten / können Rechenausdrücke, Rechenvorschriften usw. in kurzer und prägnanter Form hingeschrieben werden. Z. B.:

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100} \qquad \text{oder} \qquad O = 2\,(ab + ac + bc)$$

Das jeweils Gemeinte kann in einfachen Fällen auch verbal ausgedrückt werden, aber es ist komplizierter. Hinzu kommt, daß man auch mit diesen Darstellungen "rechnen" kann, z. B. aus der zweiten Formel herleiten:

$$c = \frac{O - 2ab}{2\,(a + b)}$$

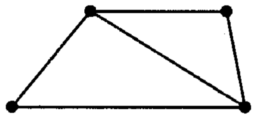
(Das geht noch mit einiger Gehirnakrobatik ohne algebraischen Formalismus, bei komplexeren Formeln ist man aber auf diesen angewiesen).

[4] Siehe dazu: Leroi-Gourhan, Andre: Hand und Wort, Frankfurt a. M. 1980, bes. S. 332.

Eine weitere Darstellungsform, der Beobachtung nach zum ersten Mal im 9. Jahrhundert im Gebrauch, ist der Funktionsgraph:

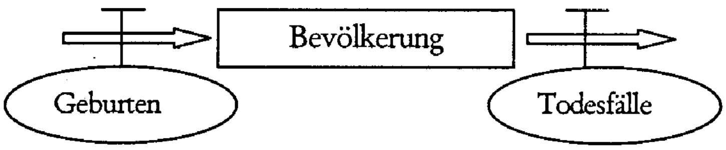
Er hat sich heute weit über die Mathematik hinaus durchgesetzt, ist geläufiges Kommunikationsmittel in Zeitungen, Fernsehinserts usw. Immer wenn quantitative Veränderungen, Verteilungen oder Ähnliches dargestellt werden sollen, wird er benützt. "Funktion" ist ein Abstraktum zumindest zweiter Ordnung: Zahlen sind schon abstrakt, ihre Veränderung erst recht. Das Studium der Zusammenhänge und Veränderungen von Größen – etwa mittels Differentialrechnung – wurde erst möglich, nachdem die Darstellungsform Funktionsgraph entwickelt worden war.

Eine Darstellungsform jüngeren Datums ist beispielsweise der Knoten-Kanten-Graph,



dem sich eine ganze mathematische Teildisziplin, die Graphentheorie widmet. Damit können Wegenetze, soziale Beziehungen in einer Gruppe, logische Zusammenhänge zwischen Begriffen und vieles mehr symbolisiert und diesbezügliche Probleme gelöst werden.

Eine andere neuere Darstellungsform ist ein Flußdiagramm:



Es gibt noch vieles andere, das von manchen vielleicht nicht mehr zur Mathematik gerechnet wird. Die Grenzen sind fließend.

Ein anderer Materialisierungsast als der graphische ist die Materialisierung in Maschinen: Abakusse, die in verschiedenen Kulturen immer noch verwendet werden, die mechanischen Rechenmaschinen bis hin zum modernen Computer, wo sämtliche routinisierte Mathematik möglich ist. Zu beobachten ist, daß durch den Computer eine Beschleunigung im Erfinden von graphischen Darstellungsformen eingetreten ist, seien es Benutzeroberflächen oder Programmiersprachen. Während früher alle paar hundert Jahre neue Darstellungsformen entwickelt wurden, sprudeln sie nun hervor; man muß ständig dazulernen. Möglicherweise wird sich die Tätigkeit der Mathematik vom Ausloten weniger gängiger mehr in Richtung des Erfindens neuer, vorgegebenen Problembereichen angepaßter, Darstellungsformen verlagern. Sofern man Mathematik und Informatik als Einheit sieht, ist das schon der Fall.

Es ist zu beobachten, daß Darstellungsformen Einfluß auf die Theorie haben: Was als mathematisches Problem angesehen wird, hängt u. a. davon ab, welche Darstellungsmöglichkeiten zur Verfügung stehen. Die Frage etwa, welche Konfigurationen mittels Zirkel und Lineal konstruierbar sind – schon in der griechischen Mathematik gestellt – wird weniger bedeutsam, wenn andere Instrumente zur Verfügung stehen. Oder: Vom 17. bis in unser Jahrhundert war die Analysis, die Lehre von den Funktionen (einschließlich Differential- und Integralrechnung), von dem Umstand geprägt, daß nur die vier Grundrechnungsarten leicht ausführbar waren und für einige spezielle Funktionen wie Sinus und Logarithmus Tabellen vorlagen. Durch den Computer hat sich die Situation grundlegend verändert. Manche Probleme sind nun obsolet, neue sind entstanden, z. B. das Problem, den Umgang mit der Komplexität, die jetzt rechnerisch bearbeitet werden kann, zu ordnen.

Zurück zur Materialisierungsthese: Man könnte zum bisher Gesagten einwenden, daß Mathematik mehr sein muß als Visualisierung abstrakter Konzepte. Das leistet ja auch schon die geschriebene Sprache, die Schrift. Worin besteht hier der Unterschied zwischen Mathematik und Schrift? Zum einen stellt Mathematik eine Erweiterung der Schrift dar. Neue Zeichen, eine spezielle Syntax kommen dazu. Die Linearität der Schrift wird durch zweidimensionale Konfigurationen, wie Formeln sie darstellen, überwunden.[5] Das Wesentliche aber ist, daß für große Teile der Mathematik <u>Umformungsregeln</u> existieren, nach denen aus vorhandenen Darstellungen neue gewonnen werden. Schon einfaches Rechnen ist dafür ein Beispiel: Aus der Darstellung

$$7+5$$

wird die neue Darstellung

$$12$$

Auch das Gleichungslösen kann man so sehen: Aus

$$O=2(ab+ac+bc)$$

wird

$$c=\frac{O-2ab}{2(a+b)}$$

Umformungen gibt es überall: beim Differenzieren von Funktionen, beim Rechnen mit Matrizen etc. Jeder sogenannte "Kalkül" enthält eine Serie von Umformungsregeln für Darstellungen und letztlich kann man auch das Beweisen so sehen: Nach logischen Regeln werden Darstellungen von Aussagen umgeformt. Die Kunst besteht darin, zu entscheiden, welche Umformungen zweckmäßig sind.[6]

Natürlich sind auch mit der Schrift Umformungen möglich: Dasselbe kann auf verschiedene Arten ausgedrückt werden. Jede schriftliche logische Argumentation kann, wie in der Mathematik, als eine Serie von Umformungen angesehen werden. Allerdings ist die Syntax der Umformungen, das diesbezügliche Regelsystem, in der Sprache bzw. in der Schrift bei weitem nicht so elaboriert und eindeutig wie in der Mathematik.[7]

Mathematik zu betreiben besteht über weite Teile in einer <u>Interaktion zwischen Mensch und Darstellung</u> (auf dem Papier, am Bildschirm). Man verändert die Darstellung, sieht sie an, verändert sie wieder, sieht sie an, usw. usw. Die Routinisierung bietet in Verbindung mit der auslagernden Materialisierung eine Entlastung. An die Stelle abstrakter Konzepte und deren gedanklicher Bearbeitung tritt eine "Mechanik der Symbole".

---

[5] Leroi-Gourhan: Hand und Wort, S. 249.

[6] Zum Beweisen siehe: Stenius, Erik: Anschauung und formaler Beweis. In: Studia Leibnitiana 13 (1981) no.1, S. 133-146.

[7] Vgl. zu all dem ausführlicher: Fischer, Roland: Offene Mathematik und Visualisierung. In: mathematica didactica 7, (1984) S. 139-160. Auch: Otte, Michael: Texte und Mittel, bes. S. 186 ff.. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 15 (1983), Heft 4, S. 183-194.Otte 1983.

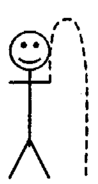
Die Kernaussage lautet somit: Durch die Mathematik bilden wir hochabstrakte Gegebenheiten auf Materielles ab und durch Manipulation des Materiellen gewinnen wir Aussagen über die abstrakten Gegebenheiten.

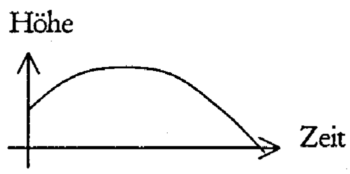
In gewisser Weise kehrt sich dabei das oft betrachtete Verhältnis von Mathematik zu den Naturwissenschaften um. Wird es üblicherweise so gesehen, daß Mathematik die Abstrakta der Natur erfaßt, so ist nach der Materialisierungsthese hinzuzufügen, daß sie das tut, indem sie das Abstrakte auf das einfachste Natürliche, nämlich auf die unbelebte Natur abbildet. Die Zeichen am Papier, die Zustände im Computer dürfen sich ja nicht aus eigenem Antrieb ändern: Mathematik als angewandte unbelebte Natur.

Es ist klar, daß durch die Mathematik viele Abstrakta nicht erfaßt werden können und daß selbst bei jenen, wo man glaubt, dies zu können, man oft etwas übersieht. Durch die mathematische Erfassung werden die Abstrakta zugerichtet, verändert, reduziert. Man kann in diesem Zusammenhang die Frage nach der grundsätzlichen Grenze mathematischer Darstellbarkeit stellen. Nach heutigem Stand sind fast alle mathematischen Konzepte auf Basis der Mengenlehre konstruierbar. Man geht dabei von der Existenz irgendwelcher Mengen aus (zur Not genügt eine) und nimmt an, daß Operationen der Vervielfachung, der Paarbildung usw. möglich sind. Das Ganze läuft darauf hinaus, aus Elementarbausteinen ein Universum von Dingen und Beziehungen zwischen den Dingen zu konstruieren. Eine Grundannahme dabei ist die Möglichkeit einer präzisen Unterscheidung zwischen den einzelnen Dingen selbst, aber auch zwischen den Dingen und den Strukturen, in denen sie stehen. Verboten ist etwa, daß Elemente die Strukturen, in denen sie stehen, in sich enthalten. Anders ausgedrückt: Ein dialektisches Verhältnis von Element einerseits und Struktur und damit Ganzheit andererseits ohne eindeutige Über- bzw. Unterordnung ist mit heutiger Mathematik nicht darstellbar. Das würde zu einem logischen Widerspruch führen und der ist in der Mathematik verboten.[8]

Funktionen der Materialisierung

Ein Stein wird nach oben geworfen, steigt, wird langsamer, kehrt um und fällt zu Boden. Dieser Vorgang kann auf verschiedene Arten dargestellt werden. Eine Darstellung ist bereits die verbale Beschreibung. Es gibt weitere, z. B.





$$h = h_o + v_o t - \frac{g}{2} t^2$$

Welches dieser drei Bilder ist anschaulich? Es liegt nahe zu sagen, daß der Grad der Anschaulichkeit von links nach rechts abnimmt. Allerdings: Was sieht man in den verschiedenen Bildern? Die Beziehung zwischen Zeit und Höhe kann man im ersten Bild nur erahnen, im zweiten "sieht" man sie. Daß die Beziehung eine quadratische Polynomfunktion ist (unter Vernachlässigung der Luftreibung), "sieht" man im dritten Bild. Im zweiten kann man es erahnen, sofern man mathematisch gebildet ist. Weder im zweiten noch im dritten Bild sieht man, daß ein Mensch etwas wirft, es könnte auch ein ganz anderer Vorgang sein, der hier beschrieben wird. Also: Was ist anschaulich? Die Antwort hängt offensichtlich davon ab, was man sehen möchte. Im Hinblick auf das Abstraktum "Beziehung zwischen Zeit

[8] Vgl. dazu: Fischer: Mittel und System.

und Höhe" sind die zweite und die dritte Darstellung anschaulicher. Das Abstrakte wird in ihnen konkret.[9]

Weitere Beispiele: Der Leistung eines Schülers bei einer Schularbeit wird eine Note, d. h. eine Zahl zugeordnet. Die Leistung ist ein komplexes, abstraktes Ding, das sich aus vielen Faktoren zusammensetzt. Die Note konkretisiert dieses Abstraktum (bei gleichzeitiger enormer Reduktion). Oder: Die Schädlichkeit eines Giftstoffes resultiert in der Regel aus einem komplexen, abstrakten Wirkungszusammenhang. Aufgrund von Expertenauseinandersetzungen wird ein Grenzwert festgelegt und aufgeschrieben. Der sagt dann, zumindest im juristischen Sinn, was Schädlichkeit ist. Oder: Zur Planung eines Hausbaus wird ein sogenannter Netzplan erstellt, in dem die Arbeitsvorgänge durch Kästchen symbolisiert und durch Linien verbunden werden, sofern der Abschluß eines Arbeitsvorganges Voraussetzung für den anderen ist. Das Bild hängt an der Wand in der Bauhütte und stellt für den Bauleiter eine Konkretisierung des Abstraktums "Hausbau" dar. (Zumindest in seiner Ganzheitlichkeit ist der Hausbau ein Abstraktum.)

In vielen Fällen wird durch die Materialisierung des Abstrakten dieses erst definiert – z. B. "Schädlichkeit". Jedenfalls erhält das Abstrakte einen zusätzlichen Grad an Realität. Diese ist gewissermaßen eine <u>entlehnte Realität</u>: Der höhere Realitätsgrad der materiellen Darstellung wird auf das Abstrakte übertragen, dieses wird wirklicher.

Die wichtigste Funktion dieser "Verwirklichung" durch Materialisierung besteht darin, daß sie den <u>Abstraktionsprozeß selbst erleichtert</u> und begünstigt. Die Fokussierung, die Konzentration auf das Abstrakte wird gefördert. Sei es die Fünfheit einer Menge, die Beziehung zwischen Zeit und Höhe, die Leistung, die Schädlichkeit, der Bauvorgang. Damit verbunden ist eine Erleichterung des Vergessens, nämlich auf all das, wovon der Abstraktionsvorgang eben abstrahiert. In Bezug auf die obigen Beispiele:

- Wer hat geworfen, was wurde geworfen?
- Wie ist die Leistung des Schülers zustandegekommen, wie war seine Tagesverfassung, etc.?
- Worin besteht die Schädlichkeit, was passiert bei geringeren Dosierungen?
- Wer arbeitet beim Hausbau, wie verläßlich sind die Leute, wie ist die Qualität der Arbeit?

In vielen Situationen ist es möglich, durch komplexere mathematische Modelle mehr zu erfassen, also auch Aspekte, von denen zunächst bei einfacheren Modellen abstrahiert wurde. Nie jedoch kann alles erfaßt werden. In der Reduktion besteht ein Nutzen der Mathematik. Man bräuchte ja die Abstraktion nicht, wenn man alles bedenken könnte. Insbesondere bei <u>Entscheidungen</u> ist Vergessen nötig. Wer alles bedenkt, wird nie fertig und kann daher nicht entscheiden. Die Mathematik erleichtert also, nicht alles zu bedenken und sich dafür umso stärker auf das, was bedacht wird, zu konzentrieren.

Besonders bedeutsam wird diese Funktion von Materialisierung dann, wenn die handelnden Subjekte nicht Individuen, sondern <u>Kollektive und soziale Systeme</u> sind, und zwar vor allem dann, wenn es sich um (zahlenmäßig) große Systeme handelt: Staaten, große Organisationen, etc. Erstens ist Abstraktes für große soziale Systeme besonders relevant – erst durch Abstraktion kann stabile Gemeinsamkeit und Verbindung hergestellt werden – zweitens ist für die Verhandlung und Entscheidung über solche Abstrakta eine Konkretisierung/Stabilisierung, letzten Endes auch eine Simplifizierung der Abstrakta nötig. (Man denke daran, welche Art von Fragen für eine Abstimmung geeignet sind.) Zur

[9] Zu unterschiedlichen Formen der Visualisierung siehe Boeckmann, Klaus: Warum soll man im Mathematikunterricht visualisieren? Theoretische Grundlagen der didaktischen Visualisierung. In: Kautschitsch, Hermann / Metzler, Wolfgang (Hg.): Visualisierung in der Mathematik. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Wien / Stuttgart 1982.

Förderung dieses Prozesses der Konkretisierung ist die Mathematik durch ihre Materialisierungen hilfreich.

Wie ausgeführt, ist Materie das, worüber wir die höchste intersubjektive Gewißheit haben, und Abstrakta auf Materie zu beziehen, bringt dann eine Erhöhung des kollektiven Sicherheitsgefühls zustande. Ob zu Recht oder zu Unrecht, bedarf jeweils genauer Untersuchung. Ein Indiz für diese Behauptung ist auch, daß ein wesentlicher Teil von Großgruppenmoderationstechnik Visualisierungstechnik ist. Ein weiteres Indiz ist das Faktum, daß Großorganisationen, d. h. Bürokratien, ohne Materialisierung (Akten) nicht auskommen. Materialisierungen spielen auch in unserem Rechtssystem eine wichtige Rolle, z. B. im Bereich der Beweismittel.

Nun einige Beispiele für Abstrakta, die in großen sozialen Systemen relevant sind:

- Wie gut geht es uns in unserem Staat? Sehr abstrakt! Einschränkung: wirtschaftlich. Eine (mathematische) Antwort gibt das "BIP", das Bruttoinlandsprodukt. Es wird materialisiert in Zahlen, Tabellen und Schaubildern. Man weiß heute, wie ungeeignet diese Konkretisierung des Abstraktums "wirtschaftliche Wohlfahrt" ist, wieviel dabei nicht bedacht wird oder sogar in falscher Richtung in die mathematische Modellierung eingeht. Jedoch wären wir ohne diese reduzierende Konkretisierung in vielen Fällen gar nicht in der Lage, über bestimmte Dinge, wie z. B. die Frage, welche Sozialleistungen bezahlt werden sollen, zu verhandeln.
- Was soll jeder für die Gemeinsamkeit beitragen? Eine Antwort gibt ein Steuersystem, materialisiert in Formeln und Tabellen.
- Wie verteilen wir die Kosten für maschinelle Arbeitsleistung, z. B. für solche, die durch elektrischen Strom ermöglicht wird? Hier kommt uns die Physik zu Hilfe mit dem Konzept "Energie" – ein Abstraktum, das noch nie jemand gesehen hat und das in Formeln, Zählgeräten und Computerausdrucken materialisiert wird.
- Wie ordnen wir Leistungsansprüche, die wir aneinander haben, einander zu? Die Materialisierung: Geld.

Alle diese Abstrakta sind Gegenstand kollektiver Kommunikationsprozesse, die Grundlagen für kollektive Entscheidungen sind. Durch die Materialisierung wird also Massenkommunikation ermöglicht oder zumindest gefördert.

Die Bedeutung der Materialisierungen geht aber noch weiter. Durch die Förderung von Massenkommunikation, durch Materialisierungen von die Masse betreffenden Abstrakta wird die selbstbezügliche Kommunikation des sozialen Systems begünstigt. Damit leistet die Mathematik einen Beitrag für die kommunikative Stabilisierung und Identitätsbildung der sozialen Systeme, letzten Endes auch der Weltgesellschaft. Ohne sie würden die abstrakten Inhalte der Kommunikation zu flüchtig und beliebig sein. Durch die Verbindung zur Materie, zu dem, worüber wir schon höchste Übereinstimmung und Gewißheit haben, wird deren Stabilität auf das Abstrakte übertragen. Diese ist aber damit, wie schon erwähnt, eine entlehnte Stabilität, die an die Gültigkeit der Verbindung: Struktur des Abstrakten – Struktur der Materie geknüpft ist. Möglicherweise hat diese Form der Stabilisierung und Identitätsbildung jene durch Personen (Könige, Kaiser, Fürsten) oder den Glauben an überirdische Mächte abgelöst oder zumindest erweitert. Sicher benützten auch Monarchen Mathematik zur Gestaltung ihrer Herrschaft, so bedeutsam wie in demokratischen oder ökonomisch dominierten Gesellschaften war sie in feudalen jedoch nicht.

Mathematik als widerspruchsfreies System

Es gibt neben der Materialisierung eine zweite Basis für die stabilitäts- und sicherheitsspendende Funktion von Mathematik: ihr Charakter als widerspruchsfreies Gesamtsystem. Während die Materialisierungsthese ein Bild entwirft, nach dem die Mathematik gewissermaßen ein Werkzeugkasten von Darstellungsformen für Abstrakta ist, gibt es auch das Bemühen der Mathematiker, zwischen diesen Werkzeugen Zusammenhänge herzustellen. Dies ist Sache der reinen Mathematik. Ihre Gegenstände sind die Darstellungsformen selbst sowie die mit ihnen gebildeten Begriffe. Die reine Mathematik bemüht sich, eine Logik der Darstellungsformen zu entwickeln, insbesondere die Regeln zur Umformung von Darstellungen bereitzustellen. Letztendliches Ziel ist es, einen Gesamtzusammenhang zu stiften, das heißt, sämtliche Darstellungsformen aufeinander zu beziehen.

Eine der letzten, recht erfolgreichen, Bemühungen, die Mathematik als Gesamtsystem darzustellen, erfolgte auf der Basis der Mengenlehre. Arithmetik, Algebra, Geometrie, aber auch die daraus hervorgegangenen Gebiete wie Analysis, Topologie, Wahrscheinlichkeitstheorie und andere mehr können auf Begriffe der Mengenlehre aufgebaut werden. Ein (hierarchischer) Zusammenhang kann dadurch gestiftet werden, daß alle Begriffe dieser Disziplinen als Mengen mit speziellen Eigenschaften aufgefaßt werden. Das diesbezügliche Programm ist mit dem Namen N. Bourbaki verbunden, ein Pseudonym, unter dem eine französische Autorengruppe publizierte. Es hat zwar Kritik an dieser Bewegung gegeben, die das strukturalistische Element in der Mathematik verabsolutiert, aber das Bestreben nach Zusammenhangstiftung ist nach wie vor stark.

Ein Indiz für die Stärke mathematischer Integrationskraft ist auch die Durchführung von Weltkongressen der Mathematik, die alle vier Jahre stattfinden. Trotz der Zersplitterung in Teilgebiete (über 3500 nach einem anerkannten Klassifikationsschema) ist man an Zusammenhängen interessiert. Veranstaltungen wie einen Weltkongreß hat man in anderen vergleichbaren (hinsichtlich ihrer Existenz als akademische Disziplinen) bereits aufgegeben. Ein anderes Indiz besteht darin, daß, zumindest in Österreich, bei der Habilitation immer noch das Gesamtgebiet der Mathematik angestrebt wird, wiewohl die Forschungsleistungen nur auf Teilgebieten erbracht werden.

Ein Postulat, das man an ein Gesamtsystem "Mathematik" heranträgt, ist die Widerspruchsfreiheit. Die über die Zusammenhänge der Darstellungen getroffenen Feststellungen sollen einander nicht widersprechen. Ein Beweis der Widerspruchsfreiheit eines nicht zu kleinen Gesamtsystems der Mathematik ist nach einem Satz von Kurt Gödel mit Mitteln des Systems allein nicht möglich (weil die Darstellungsformen so komplex sind, daß damit antinomische Aussagen formuliert werden können). Trotz dieser grundsätzlichen Unmöglichkeit wird man selbstverständlich erkannte Widersprüche beseitigen. Die Mathematik hat es hier leichter als andere Wissenschaften, weil ihr kein bestimmter Gegenstandsbereich – wie Natur, Geschichte oder Gesellschaft – vorgegeben ist, mit dem sie sich befassen muß. Wenn etwas Widersprüchliches auftritt, kann es – oder zumindest eine Seite des Widerspruchs – aus der Mathematik ausgeschlossen werden.

Ein weiteres Postulat, dessen Erfüllung aber nicht so strikt gefordert wird wie das der Widerspruchsfreiheit, ist folgendes: Aus möglichst wenig Anfangsannahmen (Axiomen) soll alles herleitbar sein. Wie gut dies gelingt, macht oft die Schönheit einer mathematischen Theorie aus. Klassische Beispiele für die "Axiomatisierung" von Teilgebieten der Mathematik sind das Axiomensystem von Guiseppe Peano für die Arithmetik und jenes von David Hilbert für die euklidische Geometrie.

Die Systemhaftigkeit, d. h. die Bemühung um einen Gesamtzusammenhang, ist die Basis für die Eigenständigkeit der Mathematik. Unabhängig davon, ob man an eine Welt platonischer Ideen glaubt oder an eine mathematische Struktur einer objektiven Wirklichkeit oder ob man meint, die Darstellungsformen der Mathematik seien reine Erfindungen des Menschen, der Zusammenhang, der zwischen den Darstellungsformen gestiftet wird, produziert die Selbständigkeit der Disziplin, die dann mehr ist als ein Arsenal von Werkzeugen des Denkens.

Was ist nun die Bedeutung der Systemhaftigkeit der Mathematik für den Menschen? Sie liegt auf der Hand: Dem Streben nach einem ideellen, widerspruchsfreien Gesamtgebilde entspricht das Streben nach Zusammenhang und Widerspruchsfreiheit und Einigkeit im sozialen Bereich. Die Mathematik eignet sich als Minimalkonsens, weil sie alles ausschließt, was der Einigkeit entgegensteht. Diese widerspruchsfreie Gesamtsystemhaftigkeit ist somit ein zweiter Faktor neben der Materialisierung, der für soziale Systeme Stabilität und Identität fördert. Wie weit dabei die genannte ästhetische Komponente eine Rolle spielt oder spielen sollte – etwa als Eleganz einer Verfassung – ist für mich eine offene Frage.

Mathematik als Zwischenwelt

Das schon erwähnte Nicht-angebunden-Sein der Mathematik an äußere Realitäten – zumindest nicht notwendigerweise – ist ein weiteres Element der sozialen Bedeutung der Mathematik für den Menschen. Dies hat Peter Heintel herausgearbeitet. Er sieht die Mathematik als identitätsbildend für die heutige Gesellschaft, und zwar gerade durch ihre Abgehobenheit von der sonstigen Welt, insbesondere von der Natur. Er zieht eine Parallele zwischen individueller und kollektiver Entwicklung des Menschen. So wie für die individuelle Identitätsbildung immer wieder Schübe der Abgrenzung, des Nein-Sagens und des Distanzierens nötig sind – von der Abnabelung über Trotzphase bis zur Pubertät – ist dies auch für die Menschheit insgesamt der Fall. Was durch die Mathematik gelungen ist, ist die Entwicklung einer gemeinsamen Denk- und Handlungsweise in Verbindung mit einer Distanzierung von der inneren und äußeren Natur des Menschen. Durch diese Abgrenzung hat die Menschheit eine bestimmte Identität gefunden. Peter Heintel schreibt:

"Mathematik ist des Menschen höchste Abstraktionsleistung gegenüber seiner inneren (sinnlichen) und äußeren Naturbestimmung.(...) Geltung hat allein die Ordnung, die sich der Verstand selbst gibt und gemeinsam bestätigt. Abgezogen werden Sinne und Tätigkeiten aus ihrer Verflochtenheit in Umwelt, Leben und Alltag. In ‚innerer Anschauung' findet sich der Mensch im Reiche der von ihm bestimmbaren Gedanken und Ordnungen und läßt die mannigfache, verführerisch-trügerische, verlockend-vereinnahmende Wirklichkeit draußen (...). Zwischen die Natur (die Dinge) und dem Menschen haben sich die Menschen in Form der Mathematik eine Zwischenwelt des Verstandes aufgebaut."[10]

In einer These zusammengefaßt: Mathematik als Zwischenwelt des (kollektiven) Verstandes distanziert von der Natur und gibt der Menschheit Identität. Metaphorisch: Mit Hilfe der Mathematik hat die Menschheit, zumindest die abendländische Gesellschaft, ihre Pubertät bewältigt. Was danach kommt, ist offen. Die Mathematik ist meines Erachtens nicht wegzudenken. Über die Frage, wie ein erwachsener Umgang mit ihr aussehen kann, darüber sollten wir uns allerdings unterhalten.[11]

---

[10] Heintel, Peter: Thesen zu einer Philosophie der Mathematik. Unv. Manuskript, Univ. Klagenfurt 1979, S. 34.
[11] Vgl. dazu: Fischer, Roland: Technologie, Mathematik und Bewußtsein der Gesellschaft. In: Kadunz, Gerd / Ossimitz, Günther / Peschek, Werner / Schneider, Edith /Winkelmann , B. (Hg.): Mathematische Bildung und neue Technologien, Stuttgart / Leipzig 1998.

Literatur:

Arnheim, Rudolf: Anschauliches Denken, Köln 1977.

Becker, Oskar: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Frankfurt a. M. 1975.

Boeckmann, Klaus: Warum soll man im Mathematikunterricht visualisieren? Theoretische Grundlagen der didaktischen Visualisierung. In: Kautschitsch, Hermann / Metzler, Wolfgang (Hg.): Visualisierung in der Mathematik. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Wien / Stuttgart 1982.

Damerow Peter/Levèvre Wolfgang (Hg.): Rechenstein, Experiment, Sprache. Stuttgart 1981.

Fischer, Roland: Offene Mathematik und Visualisierung. In: mathematica didactica 7, (1984) S. 139-160.

Fischer, Roland: Mathematik – Zwischenwelt in Maschinen, Bildern und Symbolen. In: Bammé, Arno / Baumgartner, Peter / Berger, Wilhelm / Kotzmann, Ernst (Hg.):Technologische Zivilisation, München 1987.

Fischer, Roland: Mittel und System. Zur sozialen Relevanz der Mathematik. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 1988, Heft 1, S. 20-28.

Fischer, Roland: Mathematik und gesellschaftlicher Wandel. In: Journal für Mathematik-Didaktik 12 (1991), S. 323-345.

Fischer, Roland: Perspektiven des Mathematikunterrichts. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 1996, Heft 2, S. 42-46.

Fischer, Roland: Technologie, Mathematik und Bewußtsein der Gesellschaft. In: Kadunz, Gerd / Ossimitz, Günther / Peschek, Werner / Schneider, Edith /Winkelmann , B. (Hg.): Mathematische Bildung und neue Technologien, Stuttgart / Leipzig 1998, S. 85-101

Fischer, Roland / Malle, Günther / unter Mitarbeit von Bürger, Heinrich: Mensch und Mathematik – Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln, Mannheim 1985.

Heintel, Peter: Thesen zu einer Philosophie der Mathematik. Unv. Manuskript, Univ. Klagenfurt 1979.

Leroi-Gourhan, Andre: Hand und Wort, Frankfurt a. M. 1980.

Luhmann, Niklas: Ökologische Kommunikation, Opladen 1986.

Malle, Günther: Problemlösen und Visualisieren in der Mathematik. In: Kautschitsch, Hermann / Metzler, Wolfgang (Hg.): Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Wien / Stuttgart 1985, S. 65-121.

Otte, Michael: Texte und Mittel. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 15 (1983), Heft 4, S. 183-194.

Rappoport, Anatol: Allgemeine Systemtheorie. Wesentliche Begriffe und Anwendungen, Darmstadt 1988.

Restivo, Sal / Van Bendegem, Jean-Paul / Fischer, Roland (eds.): Math. Worlds. Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education, Albany, N. Y. 1993.

Schmidt, Siegfried J (Hg.): Der Diskurs des Radikalen Konstruktivismus, Frankfurt a. M. 1987.

Stenius, Erik: Anschauung und formaler Beweis. In: Studia Leibnitiana 13 (1981) no.1, S. 133-146.